Instituto Superior de **Engenharia** do Porto

Licenciatura em
Engenharia de Telecomunicações e Informática

Matemática I

1ª Prova (Modelo)

Novembro 2025

1. Considere a função $f(x) = \log_2\left(\dfrac{8}{(1-x)^3}\right)$.

   a) Utilizando propriedades da função logarítmica, simplifique a expressão analítica da função;

   b) Determine o domínio e o contradomínio da função $g(x) = 3 - |f(x)|$;

   c) Encontre a expressão da função inversa de f. Calcule $f^{-1}(-6)$;

   d) Aplicando o teorema da derivada da função inversa, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Considere a função $g(x) = -\dfrac{\pi}{2} - 3\arccos(2x-1)$

   a) Determine o domínio e o contradomínio da função $h(x) = |\pi + g(x)| - \pi$;

   b) Caracterize a função inversa da função g;

   c) Determine a equação da recta tangente à curva representativa da função g no ponto de ordenada $-\dfrac{3\pi}{2}$;

   d) Escreva a diferencial da função $y = g(x)$ para $x = \dfrac{1}{4}$;

   e) Aplicando o teorema da derivada da função composta e sabendo que $y = g(x)$, $x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}z\right)$ e $z = e^{-\ln(t)}$, calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}$;

3. Considere as funções $x(t) = e^t - e^{-t}$ e $y(t) = e^t + e^{-t}$, com $t > 0$.

   a) Usando as regras da função composta e inversa, mostre que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$;

   b) Calcule $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ e $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

4. Usando o conceito de diferencial, determine uma aproximação para $\sqrt{9,1}$.

5. Calcule os integrais

   a) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}(3x)\left(7^{\ln(\operatorname{sen}(3x))} - \operatorname{sen}^3(3x) + \sec(3x)\right) dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x) + 1 + \operatorname{arctg}(\ln(x))}{x(\ln^2(x)+1)}\, dx \qquad (\text{faça } \ln(x) = t)$

   c) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x})}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

Soluções:

1. a) $f(x) = 3 - 3\log_2(1-x)$

   b) $D =]-\infty, 1[\qquad D' =]-\infty, 3]$

   c) $f^{-1}(y) = 1 - 2^{\frac{3-y}{3}} \qquad f^{-1}(-6) = -7$

   d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{\ln(2)} \cdot \dfrac{1}{1-x}$

2. a) $D = [0, 1] \qquad D' = \left[-\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

   b) $D = \left[-\dfrac{7\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad D' = [0, 1] \qquad g^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\cos\left(-\dfrac{y}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{2}$

   c) $y = 4\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - \dfrac{3\pi}{2}$

   d) $dy = 4\sqrt{3}\,dx$

   e) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$

3. b) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4e^{3t}}{(e^{2t}+1)^3} \qquad \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{4e^{3t}}{(e^{2t}-1)(e^{2t}+1)^2}$

4. $\sqrt{9,2} \approx \dfrac{91}{30}$

5. a) $\dfrac{1}{3\ln(7)} 7^{\ln(\mathrm{sen}(3x))} - \dfrac{1}{9}\mathrm{sen}^3(3x) + \dfrac{1}{3}\ln|\mathrm{cosec}(3x) - \mathrm{cotg}(3x)| + C$

   b) $\dfrac{1}{2}\ln\left|1 + \ln^2(x)\right| + \mathrm{arctg}(\ln(x)) + \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}^2(\ln(x)) + C$

   c) $\left[4\sqrt[4]{x}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt[4]{x}\right) - 2\,\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]_1^9 = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3} - \pi - 2\ln(2)$